1. Три различных положительных числа являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии. Могут ли эти же три числа оказаться тремя (не обязательно последовательными) членами геометрической прогрессии?

Ответ. Могут.

Решение. Рассмотрим геометрическую прогрессию $1, q, q^2, q^3$. Выберем q так, чтобы числа $1, q, q^3$ образовывали арифметическую прогрессию. Для этого нужно, чтобы выполнялось равенство $1 + q^3 = 2q \Leftrightarrow (q^2 + q - 1)(q - 1) = 0$. Один из корней этого уравнения равен $q = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. При таком значении q числа $1, q, q^3$ удовлетворяют условию задачи.

Критерии оценивания решений.

(−) решение не соответствует ни одному из перечисленных ниже критериев.

(−.) доказательство невозможности в случае рациональных чисел или последовательных членов геометрической прогрессии.

(+/2) задача явно сведена к решению полиномиального уравнения третьей степени или выше от знаменателя геометрической прогрессии, но не доказано или доказано неверно существование решения, отличного от 1.

(+/−) верное решение с небольшими недочетами (например, арифметическая ошибка, не влияющая на ход решения)

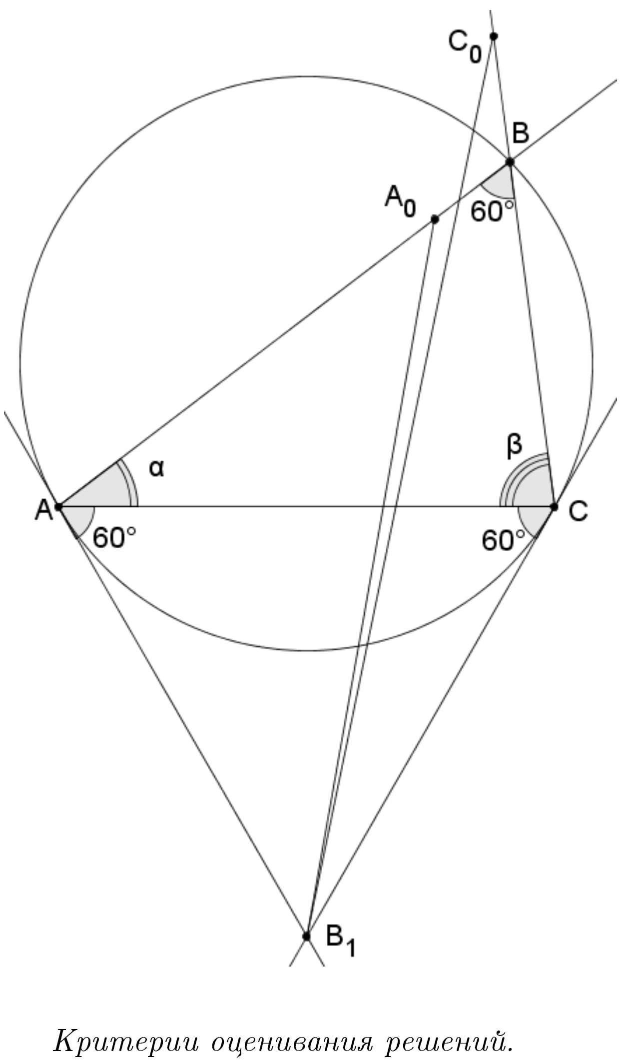
(+) Верное решение.

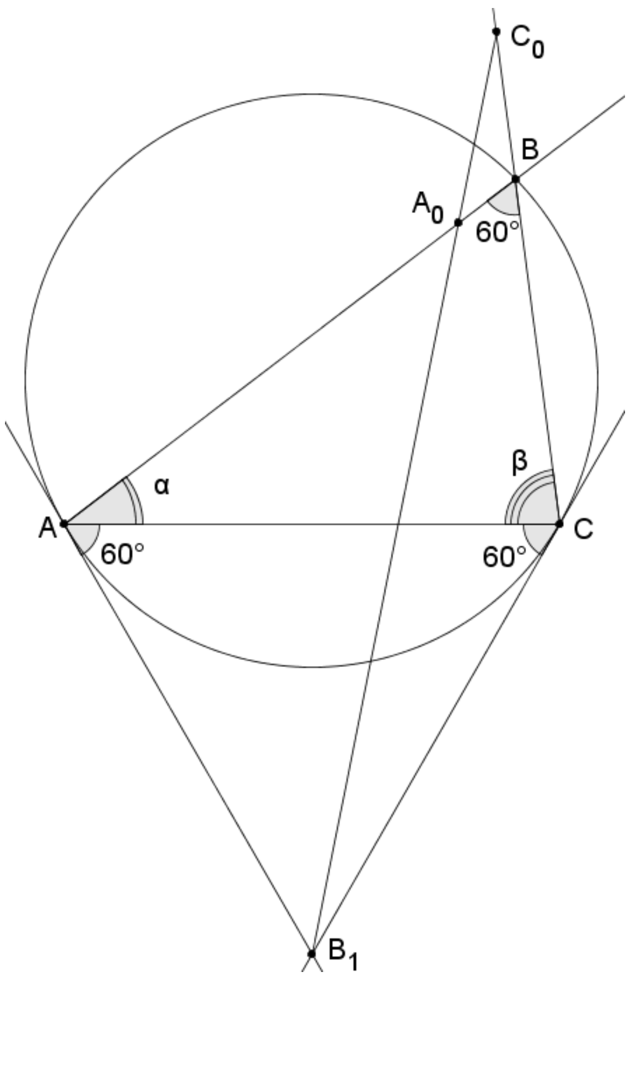
2. Вокруг треугольника ABC с углом $\angle B = 60^\circ$ описана окружность. Касательные к окружности, проведённые в точках A и C, пересекаются в точке B_1. На лучах AB и CB отметили точки A_0 и C_0 соответственно так, что $AA_0 = AC = CC_0$. Докажите, что точки A_0, C_0, B_1 лежат на одной прямой.

Решение. По теореме об угле между касательной и хордой имеем $\angle ACB_1 = \angle CAB_1 = \angle ABC = 60^\circ$, т.е. треугольник AB_1C — равносторонний. Тогда $AA_0 = AC = AB_1$, т.е. треугольник A_0AB_1 равнобедренный. Если обозначить $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \beta$, то получим $\angle AB_1A_0 = \frac{180-(60+\alpha)}{2} = \frac{120-\alpha}{2}$. Отсюда в частности следует, что $\angle AB_1A_0 < 60^\circ$, т.е. точка A_0 расположена внутри угла $\angle AB_1C$, см. рисунок слева. Аналогично $\triangle C_0CB_1$ равнобедренный, и $\angle CB_1C_0 = \frac{120-\beta}{2}$. Сумма этих углов равна

$$\angle AB_1A_0 + \angle CB_1C_0 = \frac{240-(\alpha+\beta)}{2}.$$

Учитывая, что $\alpha + \beta = 120^\circ$, получаем $\angle AB_1A_0 + \angle CB_1C_0 = 60^\circ = \angle AB_1C$, следовательно лучи B_1A_0 и B_1C_0 совпадают (рисунок справа), что и требовалось.





Критерии оценивания решений.

(−) Любое решение, не соответствующее ни одному из перечисленных ниже критериев.

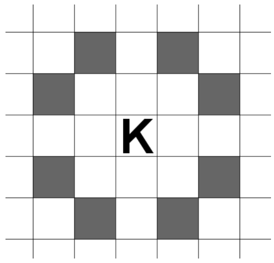
(−.) Рисунок, не соответствующий условию: точки A_0 и C_0 выбраны не на лучах AB и CB, а на их продолжениях. Для такого рисунка доказана равнобедренность треугольников $\triangle C_0CB_1$ и $\triangle A_0AB_1$.

(−/+) Доказана равнобедренность треугольников $\triangle C_0CB_1$ и $\triangle A_0AB_1$.

(+/−) Рисунок, не соответствующий условию: точки A_0 и C_0 выбраны не на лучах AB и CB, а на их продолжениях. Для такого рисунка приведено правильное решение.

(+) Правильное решение

3. Каждый ход шахматного коня — перемещение на одну клетку по горизонтали и две по вертикали, либо наоборот — одну по вертикали и две по горизонтали. (На рисунке справа конь, отмеченный буквой К, может за один ход переместиться в любую из затемнённых клеток.)



В произвольной клетке прямоугольной доски размером $2\times$ 2016 клеток стоит шахматный конь. Перемещаясь по описанному правилу (и не выходя при этом за края доски), он может из этой клетки попасть в некоторые другие клетки доски, но не во все. Какое наименьшее количество клеток нужно добавить к доске, чтобы конь мог из любой клетки доски попасть во все остальные? (Добавление клетки происходит так, чтобы она имела общую сторону с одной из уже имеющихся. Добавлять можно любое количество клеток, получившаяся при этом доска не обязательно должна иметь прямоугольную форму).

Ответ. 2

Решение. Занумеруем клетки как показано на рисунке 1. Конь может из любой клетки попасть в любую клетку с таким же номером, и не может попасть в другие.

2	3	1	4	2	3	1	4	2	3	...
1	4	2	3	1	4	2	3	1	4	...

Рис. 1

Таким образом, все клетки разбились на 4 множества, так что конь не может перескочить из одного множества в другое, но может свободно перемещаться внутри одного множества.

Добавим две клетки как на рисунке 2. Докажем, что теперь конь может попасть из любой клетки в любую другую. Клетка A "соединяет" клетки, отмеченные розовым цветом, т.е. через неё можно из множества 1 перескочить в множество 4. (Находясь в любой клетке с номером 1, можно прийти в розовую клетку с номером 1, затем через A попасть в розовую клетку с номером 4, и из неё — в любую клетку с номером 4. В итоге из любой клетки с номером 1 можно с помощью A попасть в любую клетку с номером 4.)

Клетка B соединяет клетки, отмеченные зелёным, т.е. через неё можно из любого из множеств 2, 3, 4 перескочить так же в любое из этих множеств.

В итоге, сочетая клетки A,B, можно из любого множества попасть в любое другое. Например чтобы попасть из множества 1 в множество 2, вначале с помощью A попадаем из 1 в 4, затем с помощью B попадаем из 4 в 2.

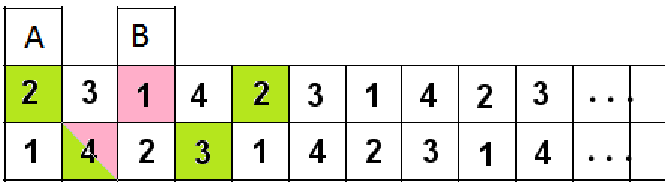


Рис.2

Осталось убедиться, что одной клетки не хватит. Из рисунка 3 видно, что все добавляемые клетки разбиваются на два вида: в клетки A можно попасть не больше чем из 3 клеток доски, в клетки B можно попасть из 4-х клеток, но среди них всегда есть две из одного множества (отмеченные одинаковой цифрой). Т.е. клетки, в которую можно попасть из всех 4-х множеств, не существует.

	A	A	B	B	...					...	B	B	A	A	
A	**2**	**3**	**1**	**4**	**2**	**3**	**1**	**4**	**2**	**3**	...		**1**	**4**	A
A	**1**	**4**	**2**	**3**	**1**	**4**	**2**	**3**	**1**	**4**	...		**2**	**3**	A
	A	A	B	B	...					...	B	B	A	A	

Рис. 3

Критерии оценивания решений. Оценивается наличие в решении трёх составляющих:
а) Показан правильный способ добавления двух клеток,
б) Доказано, что при таком способе добавления двух клеток конь действительно может обойти всю доску,
в) Доказано, что одной клетки не хватит.

(−) Решение не соответствует ни одному из перечисленны ниже критериев.

(−/+) В решении присутствует только а).

(+/2) Присутствует а)б), отсутствует или ошибочно в).

(+/−) Присутствует а)в), отсутствует или ошибочно б).

(+) Присутствует а)б)в).

4. Функция $f(x)$, определённая при всех действительных x, является чётной. Кроме того, при любом действительном x выполняется равенство

$$f(x) + f(10 - x) = 4.$$

а) Приведите пример такой функции, отличной от константы.
б) Докажите, что любая такая функция является периодической.

Решение.

а) Например $f(x) = 2 + \cos\left(\frac{\pi x}{10}\right)$. Чётность очевидна, проверим второе условие:

$$f(x) + f(10 - x) = 4 + \cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) + \cos\left(\frac{\pi(10 - x)}{10}\right) = 4 + \cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi x}{10}\right) = 0,$$

т.к. $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$.

б) Из чётности получаем $f(10 - x) = f(x - 10)$, т.е.

$$f(x) + f(x - 10) = 4$$

при любом x. Подставив сюда $x + 10$ и $x + 20$ вместо x, получим

$$f(x + 10) + f(x) = 4,$$

$$f(x + 20) + f(x + 10) = 4.$$

Вычитая из второго первое, получаем $f(x + 20) - f(x) = 0$ при любом x, т.е. функция периодична с периодом 20.

Критерии оценивания решений.

(−) любое решение, не соответствующее ни одному из перечисленных ниже критериев.

(−.) правильный пример функции без проверки выполнения условий. Допускается пример в виде графика, если в решении дано исчерпывающее и подробное описание графика с указанием всех ключевых точек.

(−/+) правильный пример функции с проверкой выполнения всех условий.

(+/2) правильный пример функции без проверки и нестрогое решение пункта б, основанное на симметриях
ИЛИ
правильный пример функции без проверки и решение пункта б с пропущенным шагом

(+/−) Полное решение пункта б)
ИЛИ
пример функции с проверкой и нестрогое решение пункта б, основанное на симметриях
ИЛИ
пример функции с проверкой и решение пункта б с пропущенным шагом

(+.) Пример функции без проверки и полное решение пункта б).

(+) Пункт а: верный пример с проверкой всех условий и полное решение пункта б)

5. Петя хочет проверить знания своего брата Коли — победителя олимпиады "Высшая проба" по математике. Для этого Петя задумал три натуральных числа a, b, c, и вычислил $x =$НОД(a, b), $y =$НОД(b, c), $z =$НОД(c, a). Затем он написал на доске три ряда по пять чисел в каждом:

$$6,\ 8,\ 12,\ 18,\ 24$$

$$14,\ 20,\ 28,\ 44,\ 56$$

$$5,\ 15,\ 18,\ 27,\ 42$$

Петя сообщил Коле, что одно из чисел в первом ряду равно x, одно из чисел во втором ряду равно y, одно из чисел в третьем ряду равно z, и попросил угадать числа x, y, z. Подумав несколько минут, Коля справился с задачей, правильно назвав все три числа. Назовите их и вы. Докажите, что существует единственная такая тройка (x, y, z).

Ответ. $x = 8,\ y = 14,\ z = 18$.

Решение. Мы будем использовать следующее утверждение: *Если два из чисел x, y, z делятся на некоторое натуральное число m, то и третье делится на m.*

Доказательство. Пусть например x и y делятся на m.

$$\begin{cases} x \vdots m \Rightarrow a \vdots m,\ b \vdots m \\ y \vdots m \Rightarrow b \vdots m,\ c \vdots m. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \vdots m \\ c \vdots m \end{cases} \Rightarrow z \vdots m.$$

□

Следствие: *если одно из чисел x, y, z не делится на m, то из оставшихся двух хотя бы одно тоже не делится на m.*

Рассмотрим теперь данные в задаче числа:

$$6,\ 8,\ 12,\ 18,\ 24$$

$$14,\ 20,\ 28,\ 44,\ 56$$

$$5,\ 15,\ 18,\ 27,\ 42$$

Заметим, что в первых двух строках все числа чётные, т.е. $x \vdots 2,\ y \vdots 2 \Rightarrow z \vdots 2 \Rightarrow z = 18$ или $z = 42$. Далее, оба числа 18 и 42 делятся на 3, т.е. $z \vdots 3$. Во второй строке нет чисел, делящихся на 3, т.е. $y \not\vdots 3 \Rightarrow x \not\vdots 3 \Rightarrow x = 8$. Далее, $x \vdots 4,\ z \not\vdots 4 \Rightarrow y \not\vdots 4 \Rightarrow y = 14$. Наконец $y \vdots 7,\ x \not\vdots 7 \Rightarrow z \not\vdots 7 \Rightarrow z = 18$.

Значения $x = 8,\ y = 14,\ z = 18$ возможны, например, при $a = 72,\ b = 56,\ c = 126$.

Критерии оценивания решений.

(−)

(−.) Рассмотрена делимость на одно число.

(−/+) Рассмотрена делимость на два числа
ИЛИ
сформулирована и доказана лемма, аналогичная или равносильная лемме из приведённого выше решения.

(+/2) Рассмотрена делимость на три числа.

(+.) Лемма, аналогичная или равносильная лемме из приведённого выше решения, используется в рассуждениях, но никак не доказана.

(+)

6. Таблица $n \times n$ заполняется натуральными числами от 1 до 10 так, чтобы ни в одной строке и ни в одном столбце не было двух одинаковых чисел. Совпадение чисел, стоящих в разных столбцах и строках, допускается. Пусть $f(n)$ - количество таких расстановок. Например $f(1) = 10,\ f(11) = 0$.

а) Что больше, $f(9)$ или $f(10)$?

б) Что больше, $f(5)$ или $f(6)$?

Ответ. а) $f(9) > f(10)$, б) $f(6) > f(5)$.

Решение. Обозначим через S_n множество всех требуемых расстановок для таблицы $n \times n$. Тогда $f(n)$ по определению равно количеству элементов в множестве S_n.

Введём операцию g над таблицей, заключающуюся в удалении последнего (крайнего правого) столбца и последней (крайней нижней) строки таблицы. Пример:

$$t = \boxed{\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 9 & 7 & 1 & 8 \\ 6 & 2 & 10 & 5 \\ 10 & 4 & 6 & 2 \end{array}} \qquad g(t) = \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 7 & 1 \\ 6 & 2 & 10 \end{array}}.$$

Очевидно, если $t \in S_n$, то $g(t) \in S_{n-1}$.

а) Мы докажем, что отображение $g: \ S_{10} \to S_9$ является инъективным (смысл термина будет разъяснён далее), и при этом его образ не покрывает всего множества S_9. Отсюда будет следовать требуемое неравенство.

Утверждение 1. *Пусть дана таблица $y \in S_9$. Тогда существует не более одной таблицы $x \in S_{10}$ такой, что $g(x) = y$.*

Доказательство. Будем восстанавливать таблицу x по известной таблице $y = g(x)$. Для наглядности изобразим обе таблицы следующим образом:

$$x = \begin{array}{|c|c|} \hline & a_1 \\ & a_2 \\ & a_3 \\ y & \vdots \\ & \vdots \\ & a_9 \\ \hline b_1\ b_2\ b_3\ \cdots\ \cdots\ b_9 & c \\ \hline \end{array}$$

Т.е. пусть последний столбец таблицы x содержит неизвестные числа $a_1, \ldots, a_9, c$, а последняя строка содержит неизвестные числа $b_1, \ldots, b_9, c$.

Число a_i должно отличаться от всех чисел в строке с номером i таблицы y. Но в любой строке таблицы y стоят 9 различных чисел из множества $\{1,\ 2,\ \ldots 10\}$, т.е. для

a_i остаётся единственное возможное значение. Следовательно все числа $a_1, \ldots, a_9$ однозначно определяются по таблице y. Аналогично, рассматривая столбцы, однозначно восстанавливаем числа b_j.

Если среди восстановленных чисел $a_1, \ldots, a_9$ есть одинаковые, получаем противоречие с условием, и следовательно таблицы x, удовлетворяющей равнеству $g(x) = y$, не существует. Если же все a_i различны, и все b_j различны, то число c должно отличаться от них всех, и такое число тоже единственно.

Итак, если таблица x существует, то она единственна, что и требовалось. $\square$

Следствие: если $x_1,\ x_2 \in S_{10}$ и $x_1 \neq x_2$, то $g(x_1) \neq g(x_2)$. (Отображение g с таким свойством в математике называется *инъективным*).

Утверждение 2. *Существует таблица $y \in S_9$ такая, что $\forall x \in S_{10}:\ g(x) \neq y$.*

Доказательство. Рассмотрим таблицу $y \in S_9$, в первой строке которой написаны подряд числа $1, 2, \ldots, 9$, а в следующих строках — те же числа, сдвигаемые по циклу каждый раз на 1:

$$y = \boxed{\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & 2013 & 2014 & 2105 \\ 9 & 1 & 2 & 3 & \ldots & 2013 & 2014 \\ 2014 & 9 & 1 & 2 & 3 & \ldots & 2013 \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \end{array}}.$$

Восстанавливая по ней таблицу x так же, как это сделано выше, мы получаем $a_1 = a_2 = \cdots = a_9 = 10$, что противоречит условию. Следовательно искомой таблицы x не существует. $\square$

Из доказанных утверждений следует, что в множестве S_9 больше элементов, чем в S_{10}, т.е. $f(9) > f(10)$.

Проиллюстрируем наглядно последний шаг рассуждения. Предположим, что мы выписали в ряд все возможные таблицы $x_1, \ldots, x_K$ из множества S_{10}. Рассмотрим следующую диаграмму отображения g:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_K & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ g(x_1) & g(x_2) & g(x_3) & \ldots & g(x_K) & y \end{array}$$

В множестве S_{10} ровно K элементов, и все они выписаны в верхнем ряду. В нижнем ряду для каждой таблицы x выписана соответствующая таблица $g(x)$, а также построенная в утверждении 2 таблица y. Все таблицы в нижнем ряду принадлежат множеству S_9, и все они по доказанному различны. Следовательно количество таблиц в множестве S_9 больше, чем в S_{10}.

б) Докажем, что при отображении $g:\ S_6 \to S_5$ в каждую таблицу множества S_5 отображается более одной таблицы множества S_6. Отсюда будет следовать требуемое неравенство.

Утверждение 3. *Пусть дана таблица $y \in S_5$. Тогда существует не менее 4 различных таблиц $x \in S_6$ таких, что $g(x) = y$.*

Доказательство. Так же, как в п. а), изобразим наглядно равенство $g(x) = y$:

$$x = \begin{array}{|ccccc|c|}\hline & & & & & a_1 \\ & & & & & a_2 \\ & & y & & & a_3 \\ & & & & & a_4 \\ & & & & & a_5 \\ \hline b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & c \\ \hline \end{array}$$

Покажем, как для заданной таблицы $y \in S_5$ построить не менее 4 различных таблиц x, удовлетворяющих равенству $g(x) = y$.

В объединении первой строки и первого столбца таблицы y написано 9 чисел (не обязательно все различные), поэтому существует число из множества $\{1, 2, \ldots, 10\}$, которого нет ни в первой строке, ни в первом столбце таблицы y. Положим a_1 и b_1 равными этому числу. Т.е. согласно нашему выбору $a_1 = b_1$.

Для $i = 2, 3, \ldots 5$ будем последовательно выбирать числа a_i так, чтобы число a_i не равнялось ни одному из чисел в i-й строке таблицы y, а также не равнялось уже выбранным числам $a_1, \ldots, a_{i-1}$. Такой выбор всегда существует, т.к. "запрещёнными" оказываются всегда не более $5 + 4 = 9$ чисел.

Аналогично для $j = 2, 3, \ldots 5$ будем последовательно выбирать числа b_j так, чтобы число b_j не равнялось ни одному из чисел в j-м столбце таблицы y, а также не равнялось числам $b_1, \ldots, b_{j-1}$.

Мы изначально выбрали $a_1 = b_1$, поэтому среди чисел $a_i, b_j,\ i, j = 1 \ldots 5$, не более 9 различных. Поэтому можно выбрать число c отличным от них всех, и тем самым завершить построение таблицы x. Построенная таблица x удовлетворяет всем условиям задачи и принадлежит множеству S_6, при этом $g(x) = y$.

Заметим, что при выборе числа a_2 запрещёнными были не более 6 чисел (числа во второй строке таблицы y и число a_1). Поэтому имелось не менее 4 способов выбрать число a_2, и все они привели бы к различным таблицам x. Следовательно таких таблиц x, для которых $g(x) = y$, не менее 4, что и требовалось доказать. □

Критерии оценивания решений.

(−) Решение не соответствует ни одному из перечисленных ниже критериев.

(−/+) В пункте а) доказано, что $f(9) \geq f(10)$ (нестрогое неравенство).

(+/2) Полностью решён один из пунктов.

(+/−) В обоих пунктах доказано нестрогое неравенство.

(+) Верное решение обоих пунктов.